Capitolo 30: Teoria dei Giochi

30.1: Introduzione

Concorrenza perfetta e monopolio rappresentano due forme di mercato estreme. Nel primo caso, nessuno dei partecipanti allo scambio è abbastanza potente (o crede di essere abbastanza potente) da fissare il prezzo di mercato; nel secondo caso, uno degli agenti si trova in una posizione dominante tale da consentirgli di determinare il prezzo. Sia in concorrenza perfetta che in monopolio, le decisioni individuali non sono influenzate dal comportamento degli altri agenti, nel senso che ogni individuo è in grado di prevedere in maniera univoca il comportamento di tutti gli altri. In questo capitolo e nel successivo, studiamo una forma di mercato intermedia nella quale le decisioni di due (o più) individui sono interdipendenti, nel senso che quando un individuo prende una decisione deve valutare anche quale decisione stia prendendo l'altro (o gli altri individui). Più in particolare, l'utilità di ciascun individuo non dipende solo dalla propria decisione, ma anche dalle decisioni prese da altri individui. Per semplificare lo studio di questa tipologia di problema decisionale, in questo e nel capitolo successivo, assumiamo che ciascun individuo debba decidere *simultaneamente e indipendentemente* dalle decisioni degli altri e senza conoscere la decisione presa dall'altro individuo.

Una tale tipologia di problema decisionale prende il nome di *gioco*. In questo capitolo discutiamo le regole che "dovrebbero" essere seguite dai partecipanti ad un gioco. Il nostro obiettivo è definire le proposizioni di comportamento da applicare all'analisi del duopolio presentata nel capitolo 31. Il duopolio è una forma di mercato intermedia tra concorrenza perfetta e monopolio nella quale due imprese producono il bene scambiato sul mercato.

30.2: Un semplice gioco

I giochi che prendiamo in considerazione hanno le seguenti caratteristiche. I partecipanti al gioco sono i due individui 1 e 2, ognuno dei quali deve decidere la propria strategia *simultaneamente* e *indipendentemente* dalla decisione dell'altro. La vincita (pay-off) di ciascun individuo non dipende solo dalla scelta dell'individuo stesso, ma anche della scelta dell'altro. Un esempio di gioco di questo tipo è illustrato nella tabella 30.1.

Tabella 30.1

30.1: un esempio di un gioco semplice

gioco 1		giocatore 2 scelta A	giocatore 2 scelta B
giocatore 1	scelta A	15 , 15	10 , 10
giocatore 1	scelta B	5 , 5	0 , 0

In questo esempio, come in tutti gli altri, chiamiamo l'individuo 1 giocatore di *riga*, perché deve scegliere di collocarsi in una delle due *righe* della matrice delle vincite. Analogamente, chiamiamo l'individuo 2 giocatore di *colonna*, in quanto deve scegliere una delle due *colonne* della stessa matrice. L'individuo 1 può scegliere tra riga A e riga B. L'individuo 2 può scegliere tra le colonne A e B. Ogni cella della matrice riporta una combinazione alternativa delle vincite dei due giocatori: la prima cifra di ogni combinazione è la vincita dell'individuo 1, la seconda cifra è la vincita dell'individuo 2. E' importante che sia ben chiara la struttura della matrice delle vincite del gioco. Ecco una descrizione dettagliata di tutte le possibili vincite dei due giocatori.

1) Se l'individuo 1 sceglie la riga A e l'individuo 2 sceglie la colonna A, la vincita dell'individuo 1 è 15 e la vincita dell'individuo 2 è 15;
2) Se l'individuo 1 sceglie la riga A e l'individuo 2 sceglie la colonna B, la vincita dell'individuo 1 è 10 e la vincita dell'individuo 2 è 10;
3) Se l'individuo 1 sceglie la riga B e l'individuo 2 sceglie la colonna A, la vincita dell'individuo 1 è 5 e la vincita dell'individuo 2 è 5;
4) Se l'individuo 1 sceglie la riga B e l'individuo 2 sceglie la colonna B, la vincita dell'individuo 1 è 0 e la vincita dell'individuo 2 è 0;

Quali strategie seguono i due giocatori? Ricordiamo che entrambi devono scegliere in maniera simultanea e indipendente: un giocatore decide la strategia da seguire senza conoscere la strategia dell'altro.

Come vi comportereste al posto del giocatore 1? La vostra vincita dipende dalla scelta del giocatore 2. Quindi, è logico chiedersi quale sia la strategia preferita dal giocatore 2. Se il giocatore 2 sceglie la colonna A, la vostra strategia preferita è la riga A (15 è una vincita maggiore di 5). Se il giocatore 2 sceglie la colonna B la vostra strategia migliore è scegliere la riga A (10 è una vincita maggiore di 0). Di conseguenza, la migliore strategia del giocatore 1 è scegliere la riga A *indipendentemente dalla scelta del giocatore 2*: la scelta della riga A è una *strategia dominante* per il giocatore 1 in quanto comporta la vincita maggiore, qualsiasi sia la strategia seguita dal giocatore 2.

Cosa possiamo dire del giocatore 2? Il secondo giocatore ha una strategia dominante? Nel nostro esempio la risposta è "si". Se il giocatore 1 sceglie la riga A, la strategia migliore per 2 è scegliere la colonna A (15 è maggiore di 10). Se il giocatore 1 sceglie la riga B, la strategia migliore per 2 è scegliere la colonna A (5 è maggiore di 0). Anche il giocatore 2 ha una strategia dominante nel gioco: scegliere la colonna A.

Il risultato del gioco è facilmente prevedibile: l'individuo 1 sceglie la riga A (la sua strategia dominante) e l'individuo 2 sceglie la colonna A (la sua strategia dominante). Il risultato del gioco è (A, A) e ogni giocatore riceve una vincita di 15.

30.3: L'equilibrio di Nash

Non tutti i giochi sono semplici come quello illustrato nell'esempio precedente. Analizziamo il gioco 2, al quale è associato la matrice delle vincite della tabella 30.2. I giocatori hanno una strategia dominante? Verifichiamolo a partire dal giocatore 1.

1) se il giocatore 2 sceglie la colonna A, la strategia migliore per il giocatore 1 è scegliere la riga A;
2) se il giocatore 2 sceglie la colonna B, la strategia migliore per il giocatore 1 è scegliere la riga B.

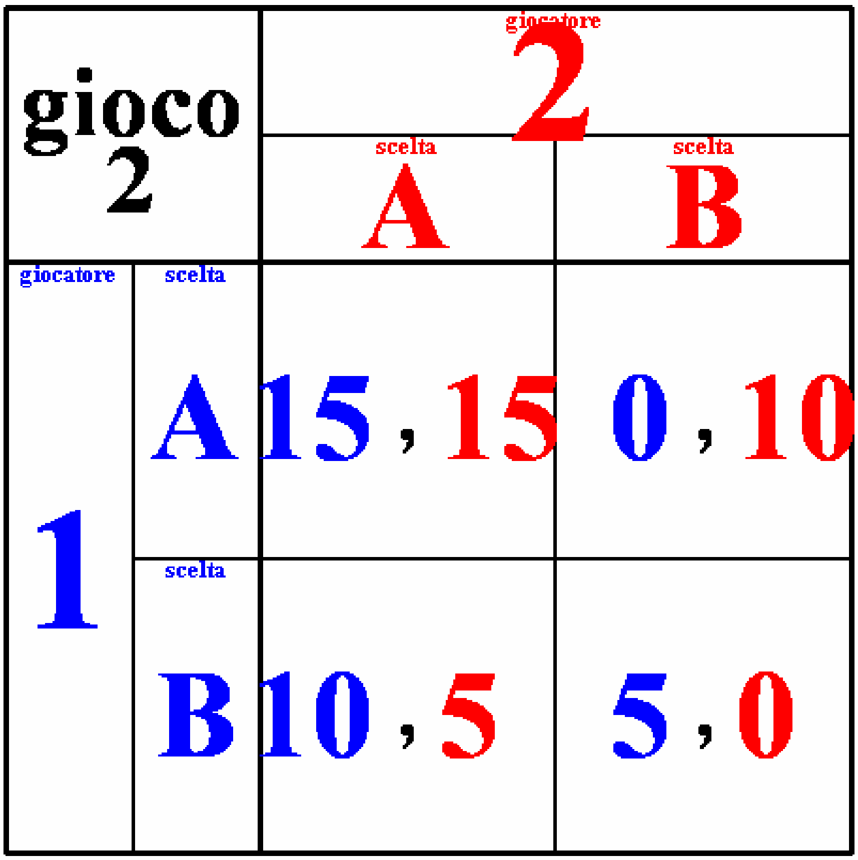
Il giocatore 1 *non* ha una strategia dominante. E il giocatore 2?

1) se il giocatore 1 sceglie la riga A, la strategia migliore per il giocatore 2 è scegliere la colonna A;
2) se il giocatore 1 sceglie la riga B, la strategia migliore per il giocatore 2 è scegliere la colonna A.

Il giocatore 2 ha una strategia dominante: scegliere la colonna A. E' questa la strategia che implica la vincita più elevata per il giocatore 2, qualsiasi strategia scelga di seguire il giocatore 1.

Tabella 30.2

30.2: un gioco con un unico equilibrio di Nash



gioco 2		giocatore 2: scelta A	giocatore 2: scelta B
giocatore 1	scelta A	15 , 15	0 , 10
	scelta B	10 , 5	5 , 0

Pur in assenza di una strategia dominante, il giocatore 1 potrebbe essere in grado di prevedere che il giocatore 2 *ha* una strategia dominante (scegliere la colonna A). In base a questa informazione si può svolgere il seguente ragionamento. Se il giocatore 2 sceglie la colonna A, la migliore strategia del giocatore 1 è scegliere la riga A. Di conseguenza, il giocatore 2 sceglie la colonna A e il giocatore 1, conoscendo la scelta del giocatore 2, sceglie la riga A. Il gioco ha per risultato la combinazione di vincite (A, A) ed entrambi i giocatori guadagnano 15.

Tale risultato soddisfa entrambi i giocatori. Infatti, per nessuno dei due è conveniente cambiare la propria decisione. E' importante notare che ciò *non è vero* per tutti gli altri possibili risultati del gioco: in (A,B) il giocatore 2 preferisce cambiare scelta; il giocatore 1 preferisce spostarsi da (B,A); in (B,B) il giocatore 2 preferisce cambiare scelta. Questa proprietà, conferisce alla combinazione (A,A) la definizione di *Equilibrio di Nash*: a nessuno dei due giocatori conviene cambiare strategia data la scelta dell'altro giocatore.

Tutti i giochi sono caratterizzati dalla presenza di un Equilibrio di Nash? Il gioco 1 ha un equilibrio di Nash, ovvero, (A,A). E il gioco con la matrice delle vincite della tabella 30.3?

Tabella 30.3:

30.3: un gioco con equilibri di Nash

gioco 3		giocatore 2	
		scelta A	scelta B
giocatore 1	scelta A	15 , 15	5 , 0
	scelta B	0 , 5	10 , 10

Il gioco 3 ha due Equilibri di Nash: (A,A) e (B,B)[104]. Si potrebbe dire che nella realtà sia più probabile che il gioco abbia per risultato (A,A), ma cosa accadrebbe se le vincite di "5" fossero sostituite da due perdite? Se è certo che il giocatore 2 sceglie la colonna A, il giocatore 1 non ha nessun problema. Ma se pensa che il giocatore 2 possa scegliere la colonna B, scegliere la riga B diventa la strategia meno rischiosa perché elimina la *probabilità* di subire una perdita.

30.4: Strategie miste

E' possibile che un gioco non abbia nessun Equilibrio di Nash. Osserviamo la tabella 30.4.

Tabella 30.4

[104] (A, A) è un Equilibrio di Nash perché al giocatore 1 non conviene cambiare la propria scelta della riga A se il giocatore 2 ha scelto la colonna A e al giocatore 2 non conviene cambiare la propria scelta della colonna A se il giocatore 1 ha scelto la riga A. Anche (B, B) è un Equilibrio di Nash perché al giocatore 1 non conviene spostarsi dalla riga B se il giocatore 2 ha scelto la colonna B e al giocatore 2 non conviene spostarsi dalla colonna B se il giocatore 1 ha scelto la riga B.

30.4: un gioco senza un equilibrio di Nash (in stratigie pure)

gioco 4		giocatore **2**: scelta **A**	giocatore **2**: scelta **B**
giocatore **1**	scelta **A**	9 , -9	-9 , 9
giocatore **1**	scelta **B**	-9 , 9	9 , -9

Le combinazioni delle vincite dei due giocatori del gioco 4 sono le seguenti:

1) (A, A) non è un Equilibrio di Nash: al giocatore 2 conviene cambiare strategia;
2) (A, B) non è un Equilibrio di Nash: al giocatore 1 conviene cambiare strategia;
3) (B, A) non è un Equilibrio di Nash: al giocatore 1 conviene cambiare strategia;
4) (B, B) non è un Equilibrio di Nash: al giocatore 2 conviene cambiare strategia.

Per questa tipologia di giochi, è necessario estendere il concetto di Equilibrio di Nash e considerare strategie più complesse. Quale pensate sia la migliore strategia di un giocatore? Ovviamente una strategia che confonda l'altro giocatore in quanto se l'altro è a conoscenza della nostra scelta può sfruttare a proprio vantaggio questa informazione. E qual è il modo migliore per confondere l'altro giocatore? Scegliere A o B *casualmente* e con la stessa probabilità. Questa strategia è conosciuta con il nome di *strategia mista*. Il gioco 4 ha un equilibrio con strategie miste.

Non considereremo oltre gli equilibri con strategie miste per il semplice motivo che non ne faremo uso nel capitolo successivo. Questo tipo di equilibrio è molto utilizzato nei corsi più avanzati di microeconomia ed è un vero peccato non avere l'occasione di studiarlo in questa sede visto che è un concetto davvero molto stimolante dal punto di vista intellettuale.

30.5: Il dilemma del prigioniero

In questo paragrafo studiamo un gioco molto famoso e che può essere applicato a vari contesti, tra cui il mercato di duopolio (vedi capitolo 31) e il problema della fornitura di un bene pubblico. Un esempio di questo gioco è rappresentato nella tabella 30.5.

Tabella 30.5

30.5: un esempio della dilemma del prigionero

gioco 5		giocatore 2 scelta A	giocatore 2 scelta B
giocatore 1	scelta A	5 , 5	99 , 0
giocatore 1	scelta B	0 , 99	96 , 96

Analizziamo nel dettaglio le proprietà di questo gioco. Si tratta di un gioco simmetrico (ma non deve esserlo necessariamente), vale a dire che è sufficiente osservare le mosse di uno solo dei due giocatori. Consideriamo il giocatore 1: data la colonna A, la vincita del giocatore 1 è maggiore nella riga A che nella riga B. Data la colonna B, la vincita del giocatore 1 è maggiore nella riga A che nella riga B. Inoltre e più importante, la vincita del giocatore 1 è maggiore in (B, B) che in (A, A). Data la simmetria del gioco, ciò implica che *l'esito* (B, B) *domina nel senso di Pareto* l'*esito* (A, A). In altri termini, entrambi i giocatori preferiscono (B, B) ad (A, A). Ricordate questo risultato.

Ma qual è la nostra previsione? Verificando l'esistenza di una strategia dominante per uno dei due giocatori, concludiamo che ne hanno una entrambi. Il giocatore 1 preferisce scegliere la riga A indipendentemente dalla strategia del giocatore 2; il giocatore 2 preferisce collocarsi nella colonna A indipendentemente dalla strategia del giocatore 1. La previsione che il giocatore 1 scelga la riga A e il giocatore 2 scelga la colonna A (sono queste le loro rispettive strategie dominanti) porta alla conclusione che la coppia di vincite per questo gioco sarà inevitabilmente (A, A). E' questo l'unico equilibrio di Nash del gioco.

L'esito (A, A) è dominato nel senso di Pareto da (B, B). Ma nonostante questa proprietà, (B, B) *non* è un Equilibrio di Nash. Infatti, ad *entrambi* giocatori converrebbe spostarsi da (B, B). Nel nostro esempio sia 1 che 2 preferiscono A.

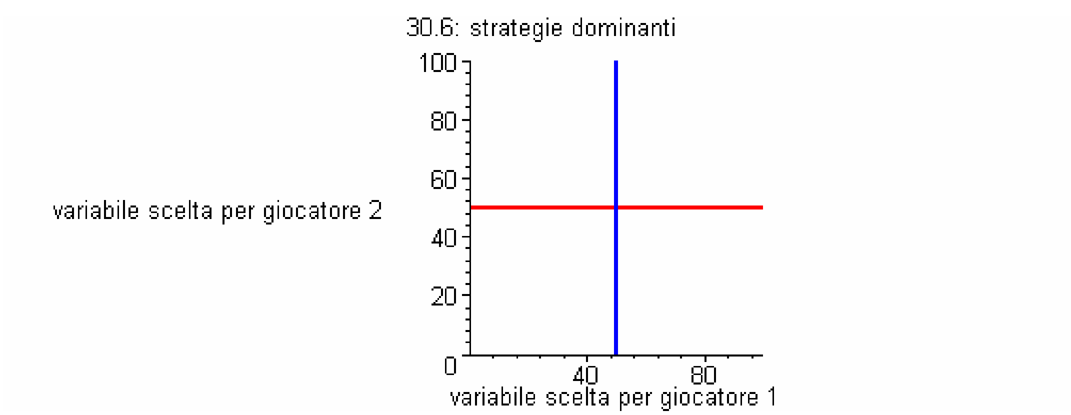
Questa è la caratteristica "paradossale" che rende di grande interesse il Dilemma del Prigioniero, studieremo alcune applicazioni di questo dilemma nei capitoli 31 e 33.

30.6: Equilibrio di Nash quando la scelta è nel continuo

Nella maggior parte delle applicazioni economiche, il "decision-maker" sceglie il valore di una variabile decisionale nel continuo. Ad esempio, come vedremo nel capitolo 31, le due imprese del mercato di duopolio devono fissare l'output da produrre o il prezzo da applicare in corrispondenza di un qualsiasi numero reale positivo. Estendiamo dunque i concetti esposti nei paragrafi precedenti ad un problema di scelta nel continuo.

Chiamiamo la variabile di scelta q e i due individui che prendono parte al gioco giocatore 1 e giocatore 2. Chiamiamo q_1 la scelta del giocatore 1 e q_2 la scelta del giocatore 2.

Il caso in cui entrambi i giocatori hanno una *strategia dominante* è di facile comprensione. In tal caso, infatti, la strategia ottima di ciascun giocatore *non dipende* dalla decisione dell'altro. Nella figura 30.6 abbiamo rappresentato q_1 sull'asse delle ascisse e q_2 su quello delle ordinate. Il grafico contiene due rette. Esse rappresentano la relazione tra la scelta ottima di un giocatore e la scelta ottima dell'altro. In due giocatori hanno entrambi una strategia dominante e, di conseguenza, la scelta ottima del giocatore 1 (2) in funzione della scelta ottima del secondo (primo) giocatore è una retta verticale (orizzontale).

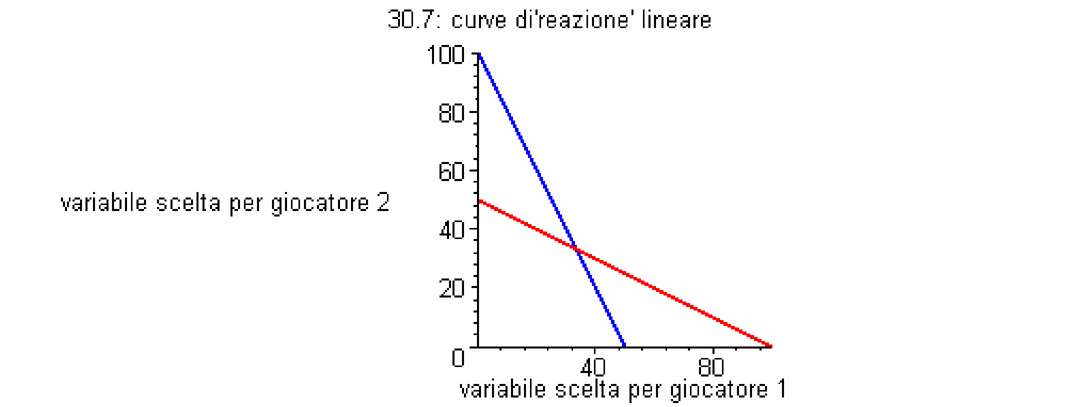


La retta verticale ha intercetta, sull'asse delle ascisse, *50*: $q_1 = 50$ è la scelta ottima del giocatore 1 qualunque sia la scelta del giocatore 2. La strategia dominante del giocatore 1 è scegliere *50* indipendentemente dalla strategia del giocatore 2. La retta orizzontale ha intercetta, sull'asse delle ordinate, *50*: $q_2 = 50$ è la scelta ottima del giocatore 2 qualunque sia la scelta del giocatore 1. La strategia dominante del giocatore 2 è scegliere *50* indipendentemente dalla strategia del giocatore 1.

L'esito di questo gioco si colloca in corrispondenza dell'intersezione delle due rette, per cui entrambi in giocatori scelgono *50*.

A questo punto è necessario introdurre un pò di terminologia. La relazione che definisce la scelta ottima di un giocatore in funzione della scelta ottima dell'altro giocatore è conosciuta con il nome di *funzione di reazione*. Nella figura 30.6, la retta verticale è la funzione di reazione del giocatore 1 e la retta orizzontale è la funzione di reazione del giocatore 2. E’ importante sottolineare che tale terminologia può essere forviante perché suggerisce che ciascun giocatore *reagisca* in qualche modo alla mossa dell’altro il che non è possibile in un gioco simultaneo. Dunque, è bene ricordare che la funzione di reazione di un giocatore ha semplicemente lo scopo di esprimere la scelta ottima di un giocatore in funzione della scelta ottima dell’altro.

Possiamo usare le funzioni di reazione per dimostrare l’esistenza dell’equilibrio di Nash. Ricordiamo che nell’Equilibrio di Nash nessuno dei due giocatori trova conveniente cambiare strategia data la scelta dell’altro. E’ facile intuire che ogni Equilibrio di Nash deve collocarsi nel punto di intersezione delle due funzioni di reazione. Osserviamo la figura 30.7.

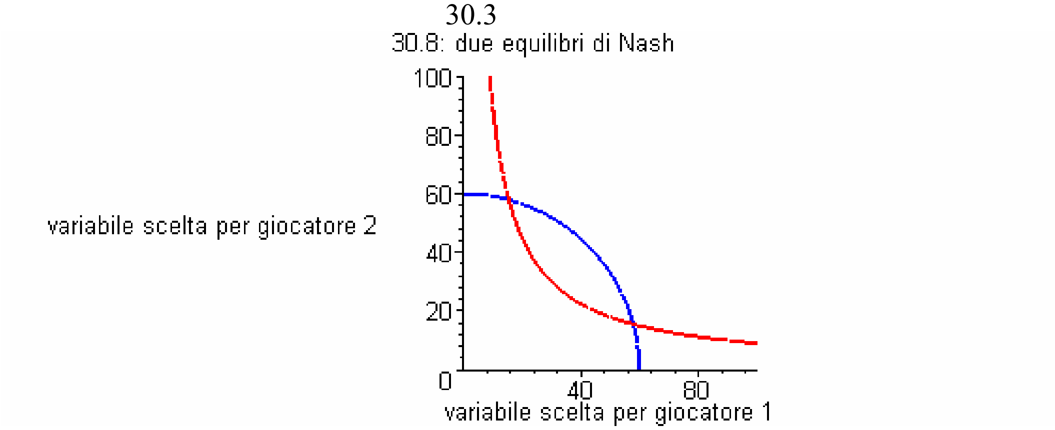


Questa figura si riferisce all’analisi del mercato di duopolio analizzato nel capitolo 31 in presenza di

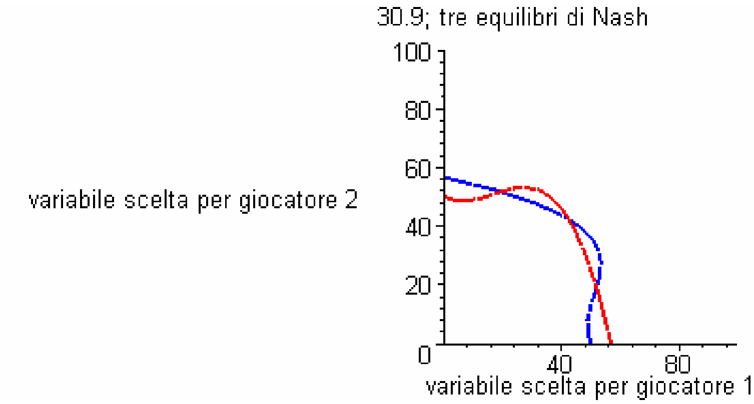
funzioni di reazione lineari. Le due funzioni di reazione si intersecano nel punto *($33.\bar{3}$, $33.\bar{3}$)*, vale a dire, nell’unico Equilibrio di Nash del gioco. In ogni punto al di fuori delle rispettive funzioni di reazione, i due giocatori trovano conveniente riconsiderare la propria decisione. Solo quando i due giocatori si trovano simultaneamente lungo le rispettive funzioni di reazione, il gioco ha un esito tale che a nessuno dei due conviene cambiare scelta.

Naturalmente è possibile che un gioco abbia 2 Equilibri di Nash. La figura 30.8 si riferisce a uno di questi casi.

30.3



Un gioco può avere anche 3 (o più) Equilibri di Nash. Un esempio viene fornito nella figura 30.9.



Nel capitolo 31 ci soffermeremo sulle implicazioni dell'esistenza di Equilibri di Nash multipli.

30.7: Riassunto

Ci siamo soffermati molto brevemente su alcuni degli elementi di teoria dei giochi. Ci siamo limitati ad illustrare giochi simultanei con 2 giocatori, nei quali un giocatore deve decidere la propria strategia senza conoscere quella dell'altro. I giochi con strategie dominanti sono di facile risoluzione.

Un giocatore ha una strategia dominante (decisione) se tale strategia è ottimale indipendentemente dalla strategia seguita dall'altro giocatore.

Altri giochi possono essere più complessi e il concetto Equilibrio di Nash può essere utile alla loro soluzione.

L'esito di un gioco è un Equilibrio di Nash se in esso a nessuno dei due giocatori conviene cambiare strategia data la strategia dell'altro giocatore.

Un gioco può avere: nessun Equilibrio di Nash (in strategie pure), un Equilibrio di Nash unico o Equilibri di Nash multipli.

Tali concetti sono importanti sia in giochi con due sole opzioni di scelta che in giochi dove la scelta si svolge nel continuo. Per questi ultimi abbiamo definito il concetto di funzione di reazione del giocatore.

La funzione di reazione di un giocatore definisce la scelta ottima di quel giocatore in funzione della scelta ottima dell'altro giocatore.

L'Equilibrio di Nash (in strategie pure) deve trovarsi nell'intersezione tra le funzioni di reazione dei due giocatori.

30.8: Domande di verifica

a. Ideate degli esempi di giochi con (1) un unico Equilibrio di Nash; (2) due Equilibri di Nash *fuori diagonale*; (3) nessun Equilibrio di Nash con strategie pure.
b. Perché, nel gioco 4 descritto in precedenza, è ottimale rendere la scelta casuale?
c. Pensate che lasciare che i giocatori discutano del possibile esito del gioco prima di decidere potrebbe eliminare l'inefficienza del Dilemma del Prigioniero?