Note sulla teoria dei giochi[1]

1. Le caratteristiche di un gioco

La teoria dei giochi è usata per lo studio delle situazioni di interazione strategica, vale a dire le situazioni in cui l'utilità di un individuo (o se si tratta di impresa, il suo profitto) dipende non solo dalla sua azione, ma anche dalle azioni scelte dagli altri agenti. Nel caso del monopolio non si ha una situazione di interazione strategica: l'impresa monopolistica, per definizione, è l'unica sul mercato dal lato dell'offerta, per cui, data la tecnologia e la domanda, il profitto dipende solo dalle sue decisioni di produzione. E nemmeno l'impresa che opera in concorrenza perfetta si trova in una situazione di interazione strategica: infatti essa non fa il prezzo e il suo profitto dipende solo dalla quantità che decide di produrre, indipendentemente da quanto fanno le altre imprese.

È nei mercati oligopolistici che le imprese si trovano tipicamente in una situazione di interazione strategica: in questi mercati, la quantità o il prezzo ottimali per una impresa dipendono sempre dalle quantità e dal prezzo scelto dalle altre imprese.

Un gioco è caratterizzato da quattro elementi:

1) i giocatori, cioè l'insieme dei decisori che interagiscono strategicamente;

2) le azioni, cioè l'insieme delle mosse a disposizione dei giocatori;

3) le strategie, cioè l'insieme dei possibili piani di azione: una strategia, dunque, specifica un'azione per ognuna delle situazioni in cui giocatore può essere chiamato a decidere (indipendentemente dal fatto che poi venga effettivamente trovarsi in quella situazione);

4) i pay-off (o le vincite), cioè l'insieme degli esiti del gioco per ciascun giocatore.

Cerchiamo di riconoscere queste caratteristiche in quello che è l'esempio di gioco più famoso: il cosiddetto *dilemma del prigioniero*.

Due criminali che hanno commesso una grave rapina sono stati arrestati e sono detenuti in celle separate (in modo che non possono comunicare). Ci sono le prove per accusarli di un crimine lieve, la detenzione di armi, la cui pena è un anno di prigione. Ciascun prigioniero ha due possibili scelte: confessare (la rapina) o tacere. Quello dei due che confesserà la rapina accusando l'altro (mentre il complice tace) uscirà subito di carcere, mentre il complice verrà condannato a 20 anni di reclusione. Se dovessero confessare entrambi la comune partecipazione alla rapina verranno condannati a 5 anni di carcere ciascuno, godendo di uno sconto di pena per essersi pentiti. Nel caso infine in cui nessuno confessasse verrebbero puniti unicamente per il reato minore ed entrambi starebbero in cella solo un anno.

In questo gioco i giocatori sono i due criminali, le azioni sono confessare e negare. I pay-off (le vincite) sono negativi, trattandosi degli anni di reclusione corrispondenti a ciascuna delle interazioni possibili.

I giocatori sono chiamati a decidere *simultaneamente* senza conoscere le decisioni dell'altro, e per questa ragione questo tipo di gioco viene chiamato *gioco a informazione imperfetta*. Inoltre, dal momento che i giocatori sono chiamati a decidere una sola volta, il piano d'azione si risolve in un'unica decisione. In altri termini, le strategie coincidono con le azioni: confessare o negare.

Vi sono due modi per rappresentare un gioco: la *forma normale* e la *forma estesa*. Del secondo modo parleremo più avanti. Qui limitiamoci a osservare che rappresentare un gioco in forma normale è particolarmente semplice: è sufficiente costruire la matrice dei pay-off.

[1] I paragrafi 1 e 2 di questa breve trattazione sono tratti in larga misura da F.Panunzi e R.Tangorra (*Microeconomia. Temi e problemi*, Egea, 2003).

Tale matrice ha sulle righe tutte le strategie di un giocatore, sulle colonne quelle dell'altro. Le celle della matrice individuano tutti possibili esiti del gioco, derivanti da ogni incrocio delle varie strategie dei due giocatori. In ogni cella sono inserite le vincite di entrambi i giocatore, sempre nello stesso ordine.

Prendiamo ad esempio il gioco del dilemma del prigioniero: la rappresentazione in forma normale di tale gioco è data dalla seguente matrice dei pay-off:

Prigioniero 2

		Confessare	*Negare*
Prigioniero 1	*Confessare*	(-5; -5)	(0; -20)
	Negare	(-20; 0)	(-1; -1)

Il primo numero di ciascuna cella è il pay-off del prigioniero 1, mentre il secondo numero è il pay-off del prigioniero 2.

2. La soluzione di un gioco: l'equilibrio di Nash

Bisogna ora capire quali strategie saranno giocate dai vari giocatori.

La soluzione più nota e utilizzata nella teoria dei giochi è *l'equilibrio di Nash*.

Nel caso di un gioco con due giocatori, A e B, si dice che *una coppia di strategie è un equilibrio di Nash,* se la scelta di A è ottima per A (dove per scelta o risposta ottima si intende la strategia che dà il payoff più alto) data la scelta di B, e allo stesso tempo la scelta di B è ottima per B data la scelta di A. In altre parole, *un insieme di strategie è un equilibrio di Nash se nessun giocatore ha incentivo a deviare unilateralmente (cioè a giocare una strategia diversa) data la strategia scelta dagli avversari.*

Vediamo come si trova un equilibrio di Nash, usando come esempio il dilemma del prigioniero. Consideriamo il prigioniero 1. Se il prigioniero 2 sceglie di confessare, il prigioniero 1 preferisce confessare, in quanto se confessa ottiene -5, mentre se non confessa -20. Se invece il secondo prigioniero nega, confessare dà un payoff al prigioniero 1 pari a 0, mentre negare dà -1. Un ragionamento simmetrico vale anche per il prigioniero 2: confessare è la sua strategia migliore sia che il prigioniero 1 confessi sia che taccia. L'unico equilibrio del dilemma del prigioniero è dunque *(confessare, confessare).* Il dilemma del prigioniero è particolarmente semplice da risolvere perché confessare è una *strategia dominante* (cioè una strategia che è sempre la migliore, qualsiasi strategia giochi l'altro giocatore) sia per il prigioniero 1 che per il prigioniero 2 e chiamiamo l'equilibrio così trovato (che è comunque un equilibrio di Nash) *equilibrio in strategie dominanti*. E' chiaro che se in un gioco vi è una stessa strategia dominante per entrambi i giocatori, questa è una soluzione di equilibrio.

Si noti peraltro che l'equilibrio di Nash nel gioco del dilemma del prigioniero rappresenta *un esito non ottimale in assoluto* per entrambi i giocatori: *se* infatti avessero potuto comunicare e sapere cosa l'altro stava facendo (ma allora il gioco sarebbe stato diverso) avrebbero scelto di non confessare, in quanto ciò avrebbe comportato un pay-off maggiore per entrambi.

La maggior parte dei giochi non ammette strategie dominanti: Inoltre per alcuni giochi non esiste nemmeno un equilibrio di Nash e per altri invece più di un equilibrio di Nash.

Si consideri ad esempio il seguente gioco, detto la Battaglia dei Sessi.

Lui	Lei: *Carne*	Lei: *Pesce*
Bianco	(0;0)	(1;2)
Rosso	(2;1)	(0;0)

Lui e Lei devono cenare insieme. Lui è incaricato della scelta del vino, mentre Lei del piatto principale. Lui può scegliere tra Bianco e Rosso, mentre Lei tra Carne e Pesce. Entrambi preferiscono la combinazioni (Rosso, Carne) e (Bianco, Pesce) alle due rimanenti combinazioni, ma Lui preferisce in assoluto (Rosso, Carne), mentre Lei preferisce in assoluto (Bianco, Pesce).

Quali sono le strategie ottimali per Lui? Supponiamo prima che Lei scelga carne: data questa scelta di Lei, per Lui sarà ottimale scegliere Rosso; sottolineiamo allora il pay-off 2 per lui nella cella (*Rosso, Carne).* Se invece Lei sceglie Pesce, la scelta ottima di Lui è Bianco; sottolineiamo quindi il pay-off 1 per Lui nella cella (*Bianco, Pesce).* Attraverso la sottolineatura, abbiamo così evidenziato la risposta ottima di Lui, cioè le strategie migliori per lui data la strategia scelta da Lei. Ripetiamo ora lo stesso procedimento per Lei, individuando la risposta ottima di Lei: la strategia ottimale per Lei è carne, se Lui sceglie Rosso, mentre è Pesce se lui sceglie Bianco. Sottolineiamo allora il pay-off 1 per Lei nella cella (*Rosso, Carne)* e il pay-off 2 per lei nella cella (*Bianco, Pesce).* Quando entrambi i pay-off di una cella sono sottolineati, ciascun giocatore sta scegliendo la sua strategia ottimale data la scelta dell'avversario: il che è la condizione perché si abbia un equilibrio di Nash. Vi sono dunque due equilibri di Nash in una Battaglia dei Sessi (*Rosso, Carne)* e (*Bianco, Pesce).*

La Battaglia dei Sessi ci illustra che un gioco può ammettere più di un equilibrio di Nash.

Questo gioco, inoltre, è interessante sotto un altro aspetto. Infatti se il telefono non funzionasse e quindi Lui e Lei dovessero scegliere senza conoscere le scelte dell'altro (cioè se fossimo nel contesto di un gioco simultaneo a informazione imperfetta), le probabilità che fosse raggiunto uno qualsiasi dei due equilibri di Nash sarebbero pari al 50%. Perché rischiare con probabilità del 50% di arrivare a una delle due combinazioni peggiori per entrambi (*Carne, Bianco* o *Pesce, Rosso*)? E' meglio cercare di contattarsi a tutti i costi, anche se resta aperto il problema di quale delle due soluzioni sarà scelta.

In altre parole un gioco di questo tipo *incentiva al coordinamento*. Si noti che in questo caso, a differenza che nel dilemma del prigioniero, chi dichiara apertamente la propria scelta, se riesce a farla accettare dall'altro, non corre comunque il rischio di "defezione". Se Lui sa che Lei sceglie *Pesce*, perché questo è l'accordo, non gli conviene poi tradire scegliendo *Rosso* (e viceversa).

3. I giochi in forma estesa

Nel gioco del dilemma del prigioniero implicitamente abbiamo assunto che i due prigionieri scegliessero la propria strategia simultaneamente. Più precisamente, avevamo ipotizzato che al momento di decidere se confessare o meno, ciascun prigioniero non fosse a conoscenza della strategia usata dal suo complice (l'altro giocatore).

Tuttavia, in molti giochi, la scelta delle azioni avviene *sequenzialmente* e quindi il giocatore che muove per secondo può osservare la strategia giocata da chi ha scelto per primo.

È proprio un gioco a scelte sequenziali quello che usiamo per illustrare la rappresentazione in forma estesa.

Consideriamo il seguente esempio, che chiameremo *gioco dell'entrata*, in cui i giocatori sono due imprese, X e Y. L'impresa X sta considerando l'ipotesi di entrare in un certo mercato. Attualmente in tale mercato l'impresa Y è monopolista. L'impresa X può scegliere tra due azioni: può entrare o non entrare. Se l'impresa X entra nel mercato, l'impresa Y, avendo osservato l'entrata, può decidere di produrre poco, in modo che entrambe le imprese facciano un profitto pari 1, oppure può decidere di produrre tanto, nel qual caso entrambe le imprese avranno profitti negativi pari a -1. Se l'impresa X non entra l'impresa Y ha sempre due azioni possibili: produrre tanto o produrre poco. In ogni caso l'impresa X, stando fuori dal mercato, ottiene profitti nulli, mentre l'impresa Y, restando monopolista, ha un profitto pari a 3 se produce tanto e pari a 2 se produce poco.

Le azioni nel gioco sono: per l'impresa X entrare o non entrare, per l'impresa Y produrre tanto o poco.

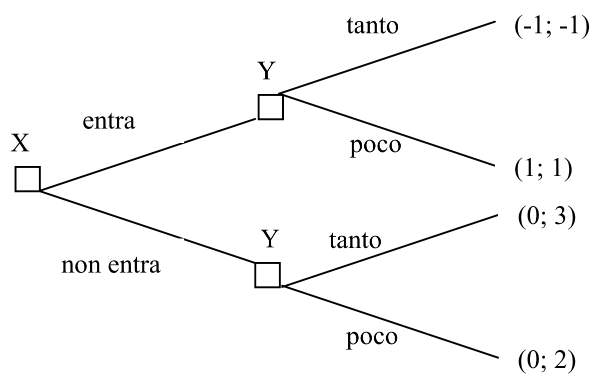
Quali sono le strategie? L' impresa X decide per prima e si trova a decidere una sola volta. Quindi il suo piano d'azione consiste in un'unica decisione (entrare o non entrare) e azione e strategia coincidono. Ciò non è vero per l'impresa Y, che decide avendo osservato l'entrata: essa infatti si può trovare in due situazioni diverse (a seconda che l'impresa X entri o meno) e in ognuna di queste situazioni può prendere due decisioni diverse (produrre tanto o poco). Una strategia infatti è un piano completo di azioni, in cui è specificata ogni azione da scegliere in ogni possibile evenienza. Una strategia deve specificare quindi cosa farà impresa Y sia nel caso in cui l'impresa X scelga di entrare oppure di non entrare.

L' impresa Y ha pertanto 4 possibili strategie:

1) produrre poco sia che l'impresa X entri, sia che non entri;
2) produrre poco solo se l'impresa X entra e tanto se non entra;
3) produrre tanto se l'impresa X entra e poco se non entra;
4) produrre tanto sia che l'impresa X entri, sia che non entri.

Le vincite sono date dai profitti che le imprese conseguono nei vari casi.

Questo tipico gioco è usualmente rappresentato informa estesa, vale a dire attraverso il seguente albero del gioco.



I punti in cui giocatore deve scegliere un'azione vengono chiamati nodi decisionali. In tali nodi indichiamo il giocatore chiamato a scegliere. Nei nodi terminali indichiamo i pay-off. Il primo pay-off è quello del giocatore che sceglie per primo (X) e il secondo quello del giocatore che gioca per secondo (Y).

Questo gioco sequenziale mostra la possibilità di *minacce (o promesse) non credibili*.

Potrebbe sembrare che a X non convenga entrare, in quanto Y minaccia di produrre anche in questo caso tanto. Ma è credibile tale minaccia? No. Infatti una volta che X è entrata, Y ottiene un pay-off di 1 se produce poco e di -1 se invece produce tanto. Dunque, la scelta ottimale per Y dopo l'entrata di X è quella di produrre poco. Pertanto una minaccia non credibile non costituisce un efficace deterrente all'entrata e l'esito di questo gioco (*equilibrio di Nash plausibile*) sarà la combinazione della seconda strategia dell'impresa Y con la strategia di entrata di X.

4. Giochi ripetuti e cooperazione

Il problema nel gioco del Dilemma del Prigioniero riguarda l'informazione e la comunicazione. Se i criminali fossero in contatto l'uno con l'altro e sapessero che l'altro non confessa, entrambi preferirebbero non confessare e ottenere così delle pene molto basse. È un saggio pubblico ministero quello che mette i prigionieri in stanze separate per creare incertezza e sfiducia. In modo simile, è molto più probabile che emerga la cooperazione nella formazione dei prezzi in oligopolio quando i manager delle imprese rivali si tengono informati l'un l'altro sui loro piani e attività e quando le transazioni di mercato sono sufficientemente semplici e frequenti da poter essere controllate facilmente.

Se è assente una completa comunicazione, le imprese sono informate in modo imperfetto sulle condizioni di mercato (quali la domanda e costi dei rivali) e le intenzioni dei rivali. Esse cercano di inferire entrambi dal passato e dai risultati di mercato e sanno che le loro azioni presenti e passate saranno interpretate dai rivali come segnali dei loro costi e delle loro intenzioni. Inoltre esiste il problema della fallibilità umana. I manager sbagliano nell'applicare le loro politiche di prezzo a specifiche situazioni, magari perché stimano in modo sbagliato gli spostamenti della domanda. Per i rivali questi errori possono essere interpretati come il passaggio ad una strategia aggressiva di prezzi bassi. Le imprese cercano strategie che siano robuste in questo ambiente incerto e che permettano loro di imparare dal passato senza aumentare la vulnerabilità ai rivali nel futuro.

Bisogna quindi cercare di capire come evolvono queste strategie e come interagiscono influenzando la performance di mercato. Negli anni recenti sono stati sviluppati molti modelli formali di teoria dei giochi basati sull'informazione imperfetta e su analisi multiperiodali. Importanti intuizioni sono nate anche da esperimenti controllati e da simulazioni, studiando i problemi della formazione dei prezzi in oligopolio sulla base di matrici dei pay-off in un gioco.

Particolarmente significative sono state le simulazione condotte da Robert Axelrod, basate sul gioco del Dilemma del Prigioniero ripetuto nel tempo. I giocatori sono imprese che possono scegliere tra "prezzo alto" e "prezzo basso" in ogni incontro con l'avversario. Ogni partita è fatta di numerosi incontri (cioè mosse) in ognuno dei quali si ripete la stessa matrice dei pay-off:

Impresa 1 \ Impresa 2	Prezzo alto	Prezzo basso
Prezzo alto	(50; 50)	(30; 60)
Prezzo basso	(60; 30)	(40; 40)

I giocatori devono decidere un piano d'azione, cioè come muovere ogni volta, tenendo conto del comportamento (mossa) dell'avversario attuato precedentemente. Essi giocano ciascuno una serie di partite, una contro ognuno degli altri giocatori, compreso un avversario che attua la propria stessa identica strategia.Ogni partita è vinta da chi accumula il pay-off più alto, ma l'importante è vincere il torneo, cioè accumulare la più alta vincita nell'insieme di tutte le partite. Il problema teorico consiste quindi nel mettere alla prova le diverse strategie per vedere quale di esse accumuli il maggior pay-off totale nell'intero torneo.

Le strategie, messe alla prova nella forma di programmi di computer, variano in complessità da lanciare una moneta alla strategia "defeziona sempre" (dove defezionare vuol dire non cooperare con l'altro giocatore, facendo prezzi bassi e produzione alta), che è quella dominante nel Dilemma del Prigioniero giocato una sola volta. Si è visto che il programma che vince il torneo è la strategia "occhio per occhio", che consiste nel cooperare nella prima mossa e poi nelle mosse successive fare qualsiasi cosa l'avversario abbia fatto nella mossa precedente. L'essenza della strategia "occhio per occhio" è che incoraggia la cooperazione minimizzando la vulnerabilità alla defezione.

Consideriamo una versione limitata del torneo di Axelrod, in cui sono giocate solo le due strategie "occhio per occhio" e "defeziona sempre". Ciascuna strategia partecipa a giochi di 200 mosse: contro se stessa e contro l'altra strategia. Quando "defeziona sempre" gioca contro se stessa, i giocatori 1 e 2 giocano il prezzo basso in ciascuna mossa, così che ciascun giocatore riceve una vincita totale di 200 *$ 40 =$8.000:

"Defeziona sempre" contro "Defeziona sempre"

	Strategie		*Pay-off*	
Mossa	Def.	Def.	Def.	Def.
1-200	Prezzo basso	Prezzo basso	40	40
Totale			8.000	8.000

Ora si consideri ciò che accade quando il giocatore 1 gioca "occhio per occhio"(OxO, in forma abbreviata) mentre il giocatore 2 gioca "defeziona sempre"(def.):

"Occhio per occhio" contro "Defeziona sempre"

	Strategie		*Pay-off*	
Mossa	OxO	Def.	OxO	Def.
1	Prezzo alto	Prezzo basso	30	60
2-200	Prezzo basso	Prezzo basso	40	40
Totale			7.990	8.020

Alla prima mossa "occhio per occhio" fa un prezzo alto e "defeziona sempre" un prezzo basso e il guadagno è 30 per "occhio per occhio" e 60 per "defeziona sempre". In ciascuna mossa seguente, entrambi i giocatori defezioneranno, ottenendo 40. Pertanto il guadagno totale di "occhio per occhio" è di 7.990 dollari, mentre quello di "defeziona sempre" è di 8.020 dollari. Vincendo nella prima mossa e pareggiando su tutte le mosse seguenti, "defeziona sempre" vince la partita. Si supponga ora che "occhio per occhio" incontri un altro rivale che gioca la strategia "occhio per occhio". Poiché entrambi fanno il prezzo alto alla prima mossa, faranno il prezzo alto anche in tutte le mosse seguenti:

"Occhio per occhio" contro "Occhio per occhio"

	Strategie		*Pay-off*	
Mossa	OxO	OxO	OxO	OxO
1-200	Prezzo alto	Prezzo alto	50	50
Totale			10.000	10.000

Ciascun giocatore ottiene un pay-off di 10.000 dollari e la partita si chiude in pareggio.

Nel complesso del mini-torneo la strategia "occhio per occhio" batte "defeziona sempre". Infatti nelle due partite "defeziona sempre" riceve 16.020 $, mentre "occhio per occhio" 17.990 $. E' vero che la strategia "defeziona sempre" garantisce a chi la gioca un guadagno almeno pari a quello dell'avversario in ogni partita e che quindi "defeziona sempre" non perde nessuna competizione testa a testa con un'altra strategia (al contrario di "occhio per occhio"). Tuttavia questo genere di vittoria è di Pirro. Infatti se c'è qualche possibilità che la strategia dell'avversario sia in qualche misura cooperativa, giocare "occhio per occhio"garantisce al giocatore un pay-off maggiore di "defeziona sempre".

Quando l'obiettivo è di massimizzare il guadagno cumulativo nel torneo piuttosto che il margine di vittoria sopra un rivale, "defeziona sempre" appare in conclusione una strategia stupida.

Numerosi partecipanti nel torneo di Axelrod hanno compreso il vantaggio che offre incoraggiare la cooperazione, ma hanno cercato di migliorare i loro guadagni defezionando a un certo punto inaspettatamente con un prezzo basso, per battere il giocatore avversario che mantiene il prezzo alto. Il problema di tali defezioni è che non è facile assicurare il ritorno di entrambi i giocatori alla strategia dei prezzi alti.

Si supponga che il giocatore 1 che gioca "occhio per occhio" giochi contro il giocatore 2 la cui strategia è pure "occhio per occhio", salvo che nella mossa 101 defeziona con un prezzo basso senza tener conto dell'azione precedente del rivale.

Nelle prime 100 mosse entrambi i giocatori fanno un prezzo alto. Nella mossa 101 il giocatore 1 gioca un prezzo alto mentre il rivale un prezzo basso. Alla mossa 102, il giocatore 2 riprende il modello "occhio per occhio" e fa un prezzo alto; tuttavia il giocatore 1 fa un prezzo basso come gli è dettato dalla sua strategia "occhio per occhio".

"Occhio per occhio" contro "Defeziona alla mossa 101"

	Strategie		*Pay-off*	
Mossa	OxO	Def.101	OxO	Def.101
1-100	Prezzo alto	Prezzo alto	50	50
101	Prezzo alto	Prezzo basso	30	60
102	Prezzo basso	Prezzo alto	60	30
103	Prezzo alto	Prezzo basso	30	60
…	…………..	………..	…	…
200	Prezzo alto	Prezzo basso	30	60
Totale			9.500	9.500

Questo modello di oscillazione continuerà fino alla fine del gioco. Il pay-off di ciascun giocatore è pari a (100 x 50) + (50 x 30) + (50 x 60) = 9.500. Gli effetti di eco della mossa defezionista del giocatore 2 riducono le vincite che ciascun giocatore può ottenere nelle mosse seguenti.

Una lezione cruciale offerta da questo torneo è che l'importante è minimizzare gli effetti di eco in un ambiente di in cui si ha interdipendenza. Quando una singola defezione può mettere in moto una lunga catena di recriminazioni e contro-recriminazioni, entrambe le parti soffrono. Un’analisi sofisticata deve quindi approfondire almeno tre livelli. Il primo livello di analisi e è l'effetto diretto di una scelta. Questo è facile, poiché la defezione guadagna sempre di più della cooperazione. Il secondo livello considera gli effetti indiretti, tenendo conto che l'altra parte può punire una defezione. Ma il terzo livello consente un ulteriore approfondimento, in quanto prende in considerazione il fatto che nel rispondere alle defezioni dell'altra parte, un giocatore può perfino amplificare le precedenti mosse aggressive. Così una singola defezione può avere successo quando è analizzata per le sue conseguenze dirette e anche forse negli effetti secondari. Ma i costi reali possono essere negli effetti terziari, quando una sola defezione isolata dà origine a mutue recriminazioni senza fine.

La strategia “occhio per occhio” ha le seguenti caratteristiche:

i) è *generosa*, in quanto offre per prima una strategia cooperativa;

ii) è *reattiva*, in quanto risponde alle defezioni dei rivali appena possibile;

iii) è *disposta al perdono,* in quanto si adegua immediatamente al ritorno di un rivale alla strategia cooperativa.